ANALISI II ING. INFORMATICA 2022-2023 (591AA) - APPELLO V, NOVEMBRE 2023

18/11/2023

VERSIONE A

Nome e cognome:____________________________________

Matricola:____________________________________

Durata: 2 ore. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Esercizio 1.

(a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, e supponiamo che esistono le derivate parziali di f. Sia (x_0, y_0) un punto minimo (locale). Cosa si può dire del gradiente di f in (x_0, y_0)?

(b) Si consideri la funzione $f(x, y) = \sqrt{3x^2 + 2y^2}$. Si calcolino i punti di massimo e minimo locali e globali per f.

Esercizio 2. Si dica, giustificandolo, se il campo

$$F(x, y, z) = (3x^2y, x^3, -z^{-1})$$

è conservativo sul dominio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}.$$

In caso affermativo, se ne calcoli un potenziale.

Esercizio 3.

Verificare che per la funzione

$$f(x, y) = x^3 + x \cos y$$

vale il Teorema del Dini nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Detta $x(y)$ la funzione implicita, si calcoli $x''(0)$.

Esercizio 4.

(a) Enunciare la formula per trovare l'area mediante integrali curvilinei, per domini limitati e semplici rispetto agli assi.

(b) Calcolare l'area della regione del piano D delimitata della curva chiusa descritta da

$$2x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Si osservi che si tratta di un'ellisse.

Soluzioni

1a. Per il teorema di Fermat, $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$.

1b. La funzione non è derivabile in $(0,0)$. Ciononostante, l'argomento della radice è sempre non nullo, e vale zero in $(0,0)$, quindi la funzione ha minimo assoluto in $(0,0)$. Non ha massimo, in quanto f diverge, e non ha massimi e minimi locali in quanto non ha mai gradiente nullo nei punti di derivabilità $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. Il rotore di F è nullo, ed essendo D semplicemente connesso si ha che F è conservativo. Integrando, un potenziale è dato da

$$U(x,y,z) = -\log z + x^3 y.$$

3. La funzione è C^1. Inoltre, $f(0,0) = 0$, $\partial_x f(x,y) = 3x^2 + \cos y$, che valutata in $(0,0)$ vale $\partial_x f(0,0) = 1 \neq 0$, pertanto valgono le ipotesi del Teorema del Dini, quindi esiste $x = x(y)$ tale che $f(x(y), y) = 0$ in un intorno di $y = 0$, con $x(y)$ derivabile con derivate

$$x'(y) = -\frac{\partial_y f}{\partial_x f}.$$

In particolare $x'(0) = 0$. Inoltre

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x^2 f(x(y),y)(x'(y))^2 + \partial_{x,y}^2 f(x(y),y)x'(y) \\ &\quad + \partial_x f(x(y),y)x''(y) + \partial_{x,y}^2 f(x(y),y)x'(y) + \partial_y^2 f(x(y),y) \end{aligned}$$

e quindi $x''(0) = 0$.

4a. Per D limitato, semplice rispetto agli assi

$$Area(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ D} x\,dy - y\,dx$$

4b. Una parametrizzazione dell'ellisse è data da $\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, 2\sin t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Quindi

$$Area(D) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{2}}\cos^2 t + \frac{2}{\sqrt{2}}\sin^2 t\,dt\right) = \sqrt{2}\pi.$$